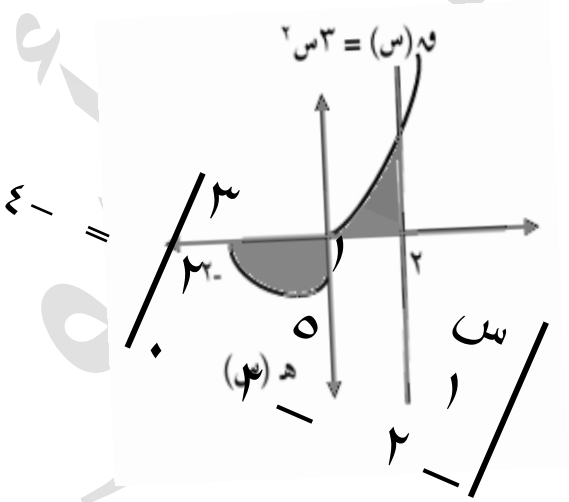
بسم الله الرحمن الرحيم

مادة تدريبية في
مبحث الرياضيات

الصف الثاني عشر الريادي

الوحدة الأولى و الثانية

المنهاج الجديد



اعداد و طباعة:

أ . عايش أبوعياد

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

للعام الدراسي

٢٠١٨ - ٢٠١٩م

المصفوفات

تعريف:

المصفوفة: هي تنظيم مستطيل الشكل لأعداد حقيقية مرتبة في "م" من الصفوف و "ن" من الأعمدة، محصورة بين قوسين [ ] ويرمز للمصفوفة بأحد الأحرف التالية : أ ، ب ، جـ ، س ، ص ، .....

- **رتبة المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن بحيث م ، ن ∈ ط***
- **يرمز للمدخلة في الصف س والعمود ص داخل المصفوفة أ بالرمز أ س ص .**

$$\text{أ} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{عمود أول} & \text{عمود ثان} & \text{عمود ثالث} \\ \end{array}$$

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ١ & -٣ \\ ١١ & -٣ & ٧ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{صف أول} \\ \text{صف ثان} \end{array}$$

لاحظ ان

- **رتبة المصفوفة أ = عدد الصفوف × عدد الأعمدة = م × ن = ٢ × ٣**
- **أ ٢١ هي المدخلة التي تقع في الصف الأول والعمود الثاني = ١**
- **أ ٣٢ هي المدخلة التي تقع في الصف الثاني والعمود الثالث = ٧**

السؤال الأول : إذا كانت : س = $\begin{bmatrix} ١ & ٧ & ٥ & ٢ \\ ٢ & ٠ & -١ & -١ \\ ٥ & ٨ & ٦ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ١ & -٤ \end{bmatrix}$

فأوجد: أ) رتبة المصفوفة س ب) عين قيم المدخلات الأتية س١١ ، س٢١ ، س٤٢ ، س٣٣

الحل /

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني: أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & -٢ \end{bmatrix} ، \text{ب} = \begin{bmatrix} ١ & -١ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١ \end{bmatrix} ، \text{جـ} = \begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٦ \\ -١ & \text{صفر} \end{bmatrix} ، \text{د} = \begin{bmatrix} ٨ \\ -١ \end{bmatrix} ، \text{س} = \begin{bmatrix} ١ & ٣ \end{bmatrix} ، \text{ص} = \begin{bmatrix} -٣ \end{bmatrix}$$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

المصفوفات الخاصة

١) المصفوفة المربعة / هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة .

مثل: أ = $\begin{bmatrix} ٨ & ٢ \\ ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ & -٩ \\ ٢ & ٧ & ٣ \\ ٦ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$

٢) المصفوفة الصفرية / هي المصفوفة التي جميع مدخلاتها أصفار ويرمز لها بالرمز " و " .

مثل: و = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، و = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٣) مصفوفة الصف/ هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد ، وعدد ن من الأعمدة و تكون رتبتها ١ × ن

مثل: أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & -٦ & ٨ \end{bmatrix}$

٤) مصفوفة العمود/ هي المصفوفة التي تتكون من عمود ، وعدد م من الصفوف و تكون رتبتها م × ١

مثل: و = $\begin{bmatrix} \frac{٦}{١٩} \\ ٩ \end{bmatrix}$ ، و = $\begin{bmatrix} ٤ \\ ٧ \\ -٥ \end{bmatrix}$

٥) مصفوفة الوحدة / هي مصفوفة مربعة مدخلات قطرها الرئيسي=١ وباقي مدخلاتها = صفر ويرمز لها بالرمز " م"

مثل : م٢ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، م٣ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

لاحظ ان المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ليست مصفوفة وحدة .

السؤال الأول:

لديك المصفوفات التالية: أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٨ & -١ & ٣ \\ ٢ & \text{صفر} & -٢ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، د= $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \end{bmatrix}$

هـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ & -١ \\ ٢ & -٤ & -٣ \\ ٦ & -٣ & ٨ \end{bmatrix}$ ، و= $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٤ \\ -١ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} \frac{١}{٣} & ٧ & -٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ، ل = $\begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} \end{bmatrix}$

١) حدد رتبة كل مصفوفة .

.....

٢) سم المصفوفة المربعة فيما بينها ، وماهي رتبتها ؟ .....

٣) ما قيمة كل من المدخلات الأتية : أ١١ ، ب١٢ ، جـ٢٣ ، د١٣

.....

٤) أوجد قيمة ب٢٣ × أ٢١

.....

٥) ما هو عدد مدخلات المصفوفة ب . .....

٦) أوجد قيمة ٢ ب$_{٢١}$ + ٣ب$_{٣٢}$ − ٢جـ$_{٣٢}$.

.....

.....

السؤال الثاني:

إذا كانت ب من الرتبة ٢×٢ اذا عرفت مدخلاتهن بحيث أن ب $_{ي هـ}$ = ٣ي − هـ أكتب هذه المصفوفة بذكر مدخلاتها .

الحل /

.....

.....

.....

تساوي مصفوفتين

تتساوى مصفوفتين أ ، ب إذا تحقق الشرطان :

١.	لهما نفس الرتبة .
٢.	المدخلات المتناظرة متساوية .

٣. مثال : $\begin{bmatrix} ٥ & -٧ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{٥} & -٧ \\ \frac{٤}{٢} & \end{bmatrix}$

السؤال الأول :

إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٣ & ص \\ س & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ فأحسب قيمتي س ، ص ؟

الحل /

.....

.....

.....

السؤال الثاني :

إذا كانت : $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ص \\ -١ & -٥ \end{bmatrix}$ ، فأحسب قيمتي س + ٢ص ؟

الحل /

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث :

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق $\begin{bmatrix} ٢ & ص \\ س - ص & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

الحل /

.....

.....

.....

السؤال الرابع :

أوجد قيمتي س ، ص في المعادلات المصفوفية الأتية :

١. $\begin{bmatrix} ٣س \\ ص + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٩ \\ ٣ \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

٢) $\begin{bmatrix} س - ١ & ٢ص \\ ٢س + ١ & ١٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١٣ & ١٣ \end{bmatrix}$.

الحل /

.....

.....

.....

.....

٣) $\begin{bmatrix} س - ص \\ س + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٧ \end{bmatrix}$.

الحل /

.....

.....

.....

.....

٤) **إذا كانت :** $\begin{bmatrix} -٣ \\ س - ٢ \\ ٣ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٣ \\ ٥ \\ ٢س \end{bmatrix}$ **فأحسب قيمتي س ، ص ؟**

.....

.....

٥) $\begin{bmatrix} س - ٢ & ٣ \\ ٥ & س + ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ **فأحسب قيمة ص ؟**

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

.....

.....

٦) إذا كانت : $\begin{bmatrix} \text{س} + ٤ \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٣\text{س} \end{bmatrix}$ فأحسب قيمة ص ؟

.....

.....

٧) إذا كانت س مصفوفة من الرتبة ٣ × ٤ ، أحسب عدد مدخلات المصفوفة س ؟

.....

العمليات على المصفوفات

أولاً / ضرب لمصفوفة في عدد حقيقي:

إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ك عدد حقيقي غير الصفر فأن : ك أ = ضرب كل مدخلة في المصفوفة أ بالعدد ك .

السؤال الأول:

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٦ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فأوجد : ٣ س ، – ٢ س ، $\frac{١}{٢}$ س

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني:

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} -١ & -٣ & ٣ \\ ٤ & \text{صفر} & ٦ \end{bmatrix}$ ، فأوجد : – ٣ س

الحل /

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث:

إذا كانت ٣ب = $\begin{bmatrix} ٩ & ١٥ \\ ٠ & ١٢ \end{bmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة ب .

الحل /

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الرابع:

إذا كانت : − س = $\begin{bmatrix} -٢ & -١٠ \\ -٤ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة $\frac{١}{٢}$ س .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الخامس:

إذا كانت : ٣ س = $\begin{bmatrix} -٩ & ٠ \\ -١٢ & ١٥ \end{bmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة − س .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السادس:

إذا كان أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٤ ، فأن رتبة المصفوفة ٣ أ هي .....

السؤال السابع:

إذا كانت س مصفوفة من الرتبة الثانية ، فأن رتبة ٥ س هي .....

السؤال الثامن:

إذا كانت رتبة $\frac{١}{٢}$ س هي ٤ × ٦ ، فأن رتبة س هي .....

السؤال التاسع:

إذا كان أ مصفوفة من الرتبة ٢ × ٤ ، فأن رتبة $\frac{١}{٢}$ أ هي .....

تمارين ومسائل

١. إذا علمت أن ٢أ = $\begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فأوجد أ ؟

الحل /

.....

.....

.....

٢. إذا كان أ = $\begin{bmatrix} س \\ ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٩ \\ ص \end{bmatrix}$ بحيث أن : ٢ أ = ٣ ب ، أوجد قيمتي س ، ص ؟

الحل /

ثانياً / جمع و طرح المصفوفات :

لإيجاد ناتج جمع أو طرح مصفوفتين أ ، ب يجب أن يكون لهما نفس الرتبة م × ن :

١. عملية الجمع يرمز لها أ + ب ، ويتم جمع المدخلات المتناظرة .
٢. عملية الطرح يرمز لها أ − ب ، ويتم طرح المدخلات المتناظرة .

السؤال الأول:

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & -٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٣ & ٦ & -٨ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد :

١) س + ص ٢) س − ص ٣) ص − س

الحل /

السؤال الثاني :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & -٣ \\ -٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -١ & ٣ & ٢ \\ ٥ & ١٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ، فأوجد !ذا امكن /

١) أ + ب ٢) جـ − ب ٣) أ − ٢ ب ٤) −٣ أ + ب

الحل /

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الثالث :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٠ & -٦ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$: فأوجد !ذا امكن /

١) أ + ب ٣) أ + ٢جـ ٤) أ − ٣ب ٥) $\frac{١}{٢}$ جـ

الحل /

السؤال الرابع

إذا كانت رتبة أ هي ٢ × ٣ ، وكان رتبة ب هي ٢ × ٣ فإن رتبة ناتج أ + ب هي .....

السؤال الخامس:

إذا كان رتبة س هي ١ × ٦ ، وكان رتبة ص هي ١ × ٦ فإن رتبة ناتج ٢ص − ٣س هي.....

السؤال السادس:

أوجد ناتج : ٢ $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ − ٣ $\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ٦ & -٣ \end{bmatrix}$ + $\begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل /

السؤال السابع:

أ) إذا كان: $\begin{bmatrix} \text{س} & ١٦ \\ ١٠ & \text{ص} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٣ & ١٠- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ١٥ \\ \text{ع} & ٧- \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل من : س ، ص ، ع ؟

الحل /

ب) إذا كان: $\begin{bmatrix} \text{س} & ٢ \\ \text{ص} & \text{س} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ & ٣ \\ \text{م} & \text{ص} \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل من : س ، ص ، م ؟

الحل /

السؤال الأول :

إذا كان: $\begin{bmatrix} ١- & ٨ \\ ٢ & \text{س} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & \text{س} \\ ٣- & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & \text{ص} \\ ٥ & ٢- \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل من : س ، ص ؟

الحل /

السؤال الثاني :

إذا كان: $\begin{bmatrix} \text{س} & ٩ \\ ٩ & ٢\text{ص} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١٤ & \text{س} + ١ \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل من : س ، ص ؟

الحل /

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الرابع:

إذا كان ٢ $\begin{bmatrix} -١ & ٩ \\ س & ٥ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} أ & ٧ \\ -٣ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ١١ \\ ١٣ & ٧ \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل من : س ، أ ؟

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الخامس :

إذا كان : أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، فأوجد كل مما يأتي :

١. ١٩ أ − ١٨ (أ + ب) + ١٧ ب

الحل /

.....

.....

.....

.....

السؤال السادس :

إذا كانت: أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$ ، فأوجد : ٣٣ أ − ٣٢ (أ + ب) + ٣١ ب ؟

الحل /

.....

.....

.....

.....

خصائص جمع المصفوفات وضربها بعدد حقيقي

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ك ∈ ح فإن :

١. أ + ب = ب + أ " خاصية تبديلية " .

٢. (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) " خاصية تجميعية " .

٣. أ + و = و + أ = أ و " محايد جمعي " .

مثال / $\begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٣ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$

٤. أ + (− أ) = (− أ) + أ = و − أ " نظير جمعي " .

مثال / أ = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ فإن أ + (− أ) = $\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٥ & -٢ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}$

٥. ك (أ + ب) = ك أ + ك ب ، ك ∈ ح " خاصية التوزيع " .

مثال / ٤ (أ + ب) = ٤ أ + ٤ ب

السؤال الاول:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ١- \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ ، فأوجد : ١) النظير الجمعي للمصفوفة أ ٢) ٣ + أ ، أن أمكن .

الحل /

السؤال الثاني:

١) حل المعادلة المصفوفية : − ٣ س + $\begin{bmatrix} ١١ & ٣ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$ = ٢س + $\begin{bmatrix} ١ & ٢- \\ ١- & ١- \end{bmatrix}$

" ملاحظة / حل المعالة المصفوفية هو إيجاد المصفوفة س "

٢)حل المعادلة المصفوفية : ٢ س − $\begin{bmatrix} ٢- & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٤ & ٠ \end{bmatrix}$ = ٢ $\begin{bmatrix} ١- & ٣- & ٧ \\ ٢- & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$

٣)حل المعادلة المصفوفية : ٣ س + ٣ $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ = س + $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ (نظامي ٢٠٠٩)

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٤)حل المعادلة المصفوفية التالية : ٢ (٣ س + $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$) = س + ٢ $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$

٥)إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ ، وكانت ٢أ + س = م٢ ، أوجد المصفوفة س .

٦)حل المعادلة المصفوفية التالية : ٥ س + ٣ $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & -٢ \\ ٠ & ٤ & ١ \end{bmatrix}$ = ٣ س + $\begin{bmatrix} ٦ & ١ & -٢ \\ ٠ & -٢ & ٢ \end{bmatrix}$

٧) حل المعادلة المصفوفية التالية : $\frac{١}{٢}$ (٨ س + ٣ $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$) = ٢ س + $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

٨) إذا كانت ب = $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، إذا كان ٥ب+ ٣جـ = $\begin{bmatrix} ١٨ \\ ٢٢ \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة جـ .

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

ضرب المصفوفات

إذا كان أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، ب من الرتبة ن × هـ فإن : أ × ب هي مصفوفة جـ من الرتبة م × هـ ،

أي أن : $أ_{م×ن} \times ب_{ن×هـ} = جـ_{م×هـ}$

لاحظ أن : يجب أن يتساوى عدد الأعمدة للمصفوفة أ مع عدد الصفوف ب .(شرط ضرب مصفوفتين)

يتم ضرب صفوف أ بجميع أعمدة ب .

السؤال الاول:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أ × ب = جـ ، وكانت رتبة ب = ٢×٣، ورتبة جـ = ٣×٣، أوجد رتبة أ .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني:

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث $أ_{م×٣} \times ب_{ن×٤} = جـ_{٢×هـ}$ ، فإوجد قيم كل من : م ، ن ، هـ على الترتيب .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث :

إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٨ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد ١) أ . جـ ٢) جـ . ب ١) $ب^٢$ ٢) $أ^٢$ أن أمكن .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع:

أوجد ناتج الضرب :

١) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -٢ & ٥ \end{bmatrix}$.

الحل /

٢) $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل /

٣) $\begin{bmatrix} ٣ & -١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$.

الحل /

٤)إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & -١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ & ٣ \\ ١ & -١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

فأوجد ١) (أ . ب) . جـ **٢)** ٢(جـ . ب) **١)** أ . ٢ب

الحل /

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

تمارين ومسائل :

١. إذا كانت أ،ب،جـ مصفوفات بحيث أ× ب = جـ ، وكانت رتبة ب= ٣×٢، ورتبة جـ =٢×٢ فأوجد رتبة أ ؟

.....

.....

٢. إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أ × ب = جـ ، وكانت رتبة أ= ٢×٣، ورتبة جـ =٢×٣ فأوجد رتبة ب ؟

.....

.....

٣. إذا كانت أ مصفوفة من الرتبة ٢×٣ ، ورتبة ب = ٣×٥ بحيث جـ = أ × ب فأوجد رتبة جـ

.....

.....

٤. إذا كانت أ $_{٣\times٢}$ ، ب $_{٢\times٣}$ ، جـ $_{٢\times٢}$ ، أي العمليات الآتية يمكن اجرائها أ) أ × ب + جـ

.....

ب) ب × أ + جـ .....

جـ) أ × جـ + ب .....

د) ب × جـ + أ .....

تمارين ومسائل :

١) إذا كان $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \\ ١ & س \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ص & ٢ & -١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١٢ & ١١ \\ -٢ & ١١ & ٨ \\ ٣ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة كل من س ، ص .

.....

.....

.....

٢) إذا كان $\begin{bmatrix} ٤ & أ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٠ \\ -٦ & ب \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٥ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة كل من أ ، ب .

.....

.....

.....

٣)إذا كان $\begin{bmatrix} س & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س \\ ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & -٢س \end{bmatrix}$ ، فما قيمة / قيم س ؟

.....

.....

٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & \text{صفر} & ٢ \end{bmatrix}$ ، وكان جـ = أ × ب

فجد قيمة كلا مما يأتي : قيمة جـ ٢١ ، جـ ٣٢ .

.....

.....

.....

خصائص ضرب المصفوفات

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث عمليتي الضرب والجمع في الآتي معرفة ، ك ∈ ح :

١. إذا كانت أ ب ≠ ب أ " غير إبداليه "

٢. أ (ب + جـ) = أ ب + أ جـ " التوزيع من اليمين "

٣. (أ + ب) جـ = أ جـ + ب جـ " التوزيع من اليسار "

٤. (أ ب) جـ = أ (ب جـ) " خاصية التجميع "

٥. أ م = م أ = أ " م المصفوفة المحايدة "

٦. ك (أ ب) = (ك أ) ب = أ (ك ب)

أسئلة امتحانات سابقة على خصائص ضرب المصفوفات :

١) إذا كان س × $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$ ، فأن س = ...

٢) المصفوفة المحايدة في عملية ضرب المصفوفات الثنائية .....

٣) إذا كانت س ، ص مصفوفتان من الرتبة ٢×٢ ، حيث س ص = ص س = س فإن ص = ...

٤) إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٤ & -٦ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$ جد/ أ ب ماذا تلاحظ ؟ .....

٥) إذا كانت $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ × س = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن س = ...

ملاحظة /

إذا كانت أ ، ب ، جـ مصفوفات بحيث أ ب = أ جـ فإن ب ≠ جـ وهذا يعني انه لا يمكن اختزال (حذف) أ من الطرفين .

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

المحددات

أولاً / محدد مصفوفة من الرتبة الثانية :

تعريف / إذا كانت س = $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ فإن محدد المصفوفة س و يرمز له بالرمز |س|

|س| = (أ × د) − (ب × جـ)

السؤال الأول :

أوجد محدد المصفوفات التالية :

أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -٢ & ٣ \\ ١ & ٦ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل / | أ |

.....

|ب|

.....

|جـ| .....

السؤال الثاني :

إذا كانت : أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٦ & ٤ \end{bmatrix}$ فأوجد :

| أ | .....

| ٢ أ |

.....

.....

| − ٣ أ |

.....

.....

السؤال الثالث :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جد :

| أ | .....

| ب | .....

| أ − ب |

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الرابع :

١)إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{bmatrix}$ ، جد : $|أ \times ب|$

الحل /

٢)إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ١ & ٤ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$ ، فإن |س| + |ص| = ...

٣)إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٣ \\ ٦ & ٩ \end{vmatrix}$ = صفر ، فإن قيمة س هي :

٤) إذا كانت ا ، ب مصفوفتان ثنائيتان فإن إحدى العبارات التالية صحيحة :

أ) |ا + ب| = |ا| + |ب|

ب) |ا – ب| = |ا| - |ب|

جـ) |ا ب| = |ا| × |ب|

٥) إذا كان $\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ٣ & س - ١ \end{vmatrix}$ = – ١٠ ، فما قيمة / قيم س ؟

٦) إذا كان $\begin{vmatrix} س & ١ \\ ٢ & س - ١ \end{vmatrix}$ = صفر ، فما قيمة / قيم س ؟

٧) ما قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٥ & ٢\text{س} - ٣ \end{vmatrix}$ = صفر ؟

٨) ما قيمة / قيم س التي تجعل $\begin{vmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & \text{س} - ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & -٢ \end{vmatrix}$ ؟

السؤال الخامس :

إذا كانت أ مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وكان $|\text{أ}| = ٢$، اوجد ما يلي :

١) $|\text{أ} + (-\text{أ})|$

٢) $|\text{أ} \times \text{م}|$

٣) $|٢\text{أ}|$

السؤال السادس :

إذا كانت س مصفوفة ثنائية وكان $|\text{س}| = ٤$ ، اوجد ما يلي :

١) $|٢\text{س}|$

٢) $|-\text{س}|$

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

أ. عايش أبو عياد

.السؤال السابع :

إذا كانت مصفوفة ثنائية وكان | ٣ س | = ٢٧ ، اوجد : | س | .

السؤال الثامن :

إذا كانت ص مصفوفة من الرتبة الثانية وكان | ٦ ص| = ٢٤ ، اوجد ما يلي :

١) | ص|

٢) | – ٢ص|

السؤال التاسع :

إذا كانت | أ ب | = ٢٧ ، | ب | = ٣ اوجد | أ | .

السؤال العاشر :

إذا كانت | أ | = ٤ ، | ب | = ٥ اوجد | أ ب| .

ثانيا / محدد مصفوفة من الرتبة الثالثة :

السؤال الأول :

أحسب محددة المصفوفة أ ، حيث أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ -٤ & ٥ & ٠ \\ ٢ & ١ & -١ \end{bmatrix}$

الحل /

السؤال الثاني :

جد قيمة : $\begin{vmatrix} -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$

الحل /

السؤال الثالث :

إذا كانت $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٢ \\ ١ & س & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٣س \end{vmatrix}$ ، فما قيمة س أو قيم س الممكنة ؟

الحل /

السؤال الرابع :

أحسب محددة المصفوفة ب ، حيث ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ١ & ٠ & -٤ \\ ٣ & ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل /

السؤال الخامس :

إذا علمت أن $\begin{vmatrix} س & ١ & ٣ \\ ١ & ٥ & ٢ \\ -٢ & -٢ & ٠ \end{vmatrix}$ = −٤ ، فما قيمة س ؟

الحل /

السؤال السادس:

إذا كانت $\begin{vmatrix} س & -٢ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٥ & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$ ، فجد قيمة س ؟

الحل /

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال السابع:

إذا علمت أن المصفوفة $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & \text{س} \\ ٢ & ٥ & -٣ \\ ٦ & ٢ & ٨ \end{bmatrix}$ ، أوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة منفردة ؟

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

النظير الضربي للمصفوفة المربعة من الرتبة الثانية

تعريف / إذا كانت : $\text{س} = \begin{bmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{bmatrix}$ فإن النظير الضربي المصفوفة س ، و يرمز له بالرمز $\text{س}^{-١}$

$\text{س}^{-١} = \frac{١}{|\text{س}|} \begin{bmatrix} \text{د} & -\text{ب} \\ -\text{جـ} & \text{أ} \end{bmatrix}$ ، بحيث $|\text{س}| \neq$ صفر

أي أن شرط وجود نظير ضربي للمصفوفة س هو أن : $|\text{س}| \neq$ صفر

خطوات إيجاد النظير الضربي :

١. نجد $|\text{س}|$ يجب أن يكون : $|\text{س}| \neq$ صفر
٢. نبدل عنصري القطر الرئيسي
٣. نغير اشارتي عنصري القطر غير الرئيسي
٤. نضرب المصفوفة الجديدة في $\frac{1}{|\text{س}|}$

السؤال الأول :

١) $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٦ & ١ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢) ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ١ \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظة /

١. إذ اكانت أ مصفوفة من الرتبة الثانية فإن : أ . أ$^{-١}$ = أ$^{-١}$. أ = م$_{٢}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

٢. إذ اكانت أ ، ب مصفوفتان من الرتبة الثانية بحيث أ × ب = ب× أ = م $_{٢}$ فإن أ هي نظير ضربي للمصفوفة ب .

السؤال الأول :

١) إحدى المصفوفات التالية ليس لها نظير ضربي :

أ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٨ \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

٢). إحدى المصفوفات التالية منفردة :

أ) $\begin{bmatrix} ١ & -١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ٢ & -٤ \\ ٤ & ٨ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -٣ & ٦ \\ ٢ & -٤ \end{bmatrix}$

.....

.....

السؤال الثاني :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٢ & -٧ \\ -١ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ ، ع = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ بين أن: س × ص = ٢ ع$^{-١}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

أسئلة إضافية :

السؤال الأول :

إذا كانت س = $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} -٧ & ٢ \\ -٣ & ١ \end{bmatrix}$ ،

فجد : ١) س $^{-١}$ ٢) (س + ب)$^{-١}$ ٣) (٢س)$^{-١}$

الحل /

السؤال الثاني :

إذا كانت أ ، ب مصفوفتان لكل منهما نظير ضربي فإن : (أ ب)$^{-١}$ = ...

الحل /

السؤال الثالث :

إذا كانت: أ $^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$ ، ب $^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ ، فأوجد : (أ ب)$^{-١}$

الحل /

السؤال الرابع :

إذا كانت $أ^{-١} = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & س \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة س ؟

الحل /

السؤال الخامس:

إذا كانت $أ = \begin{bmatrix} س & ١ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{bmatrix} ٢ & ص \\ -٥ & ٣ \end{bmatrix}$ ، فأوجد قيمة س ، ص ؟

الحل /

السؤال السادس:

إذا كانت : أ مصفوفة ثنائية .

أوجد : ١) $|أ\ أ|^{-١}$ ٢) $|أ|\ |أ|^{-١}$

الحل /

تعريف / المصفوفة المنفردة / هي مصفوفة مربعة محددها = صفر ، وليس لها نظير ضربي .

المصفوفة غير المنفردة / هي مصفوفة مربعة محددها ≠ صفر ، و لها نظير ضربي .

السؤال الأول :

المصفوفة المنفردة بين المصفوفات الأتية :

أ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -٦ \end{bmatrix}$ جـ) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} ٤ & -٢ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل /

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الثاني :

قيمة ص التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} ٦ & ص \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ منفردة هي .....

الحل /

.....

.....

.....

.....

السؤال الثالث:

إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} ٤ & س \\ س & ٩ \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ، فإن قيمة س هي .....

الحل /

.....

.....

.....

.....

السؤال الرابع:

قيمة س التي المصفوفة منفردة لكل مما يأتي : .....

أ) $\begin{bmatrix} ١ & س \\ س - ١ & ٠ \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الخامس:

أ مصفوفة من الرتبة م × ن ، إحدى العبارات الأتية صحيحة دائماً .....

أ) للمصفوفة أ نظير ضربي ب) يمكن ايجاد المصفوفة أ × أ

جـ) يمكن تنفيذ العملية ٤ + أ د) للمصفوفة أ نظير جمعي .....

الحل /

.....

أ. عايش أبو عياد

.السؤال السادس : اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{٣}}{٢} & \frac{١}{٢} \\ -\frac{١}{٢} & \frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{bmatrix}$ فبين أن أ = أ $^{-١}$.

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال السابع:

حل المعادلة المصفوفية الآتية :

١) س . $\begin{bmatrix} \text{صفر} & ٣ \\ ٥ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٢٠ \\ ٣٠ & \text{صفر} \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢) $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & -٢ \end{bmatrix}$. س = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -٢ & -١ \end{bmatrix}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الثامن:

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٤ \\ -١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٥ \\ -٤ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة ب ، حيث أ × ب = جـ .

الحل /

السؤال التاسع :

إذا كانت أ ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix}$ ، أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$ ، أوجد المصفوفة ب .

الحل /

السؤال العاشر :

إذا كانت ب $^{-١}$ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$ ، وكان : ب × أ − $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ = و ، أوجد المصفوفة أ .

الحل /

حل أنظمة المعادلات باستخدام المصفوفات

أولاً / طريقة النظير الضربي :

١) حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي : س + ٢ ص = −٢ ، ٣ س + ١١ص − ٩ = صفر

٢) حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي : س + ص − ١ = صفر ، ٢ ص + ٣س = صفر

٣) حل النظام التالي باستخدام طريقة النظير الضربي : س = ص + ١ ، ٢ س + ص = ٢

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

ثانياً / طريقة كريمر :

١) حل نظام المعادلات الاتي باستخدام طريقة كريمر : ٥ س + ٣ ص = ٧ ، ٢ ص – س = –٤

٢) حل النظام التالي س – ص = ٧ ، ٢ س + ص = ٢ باستخدام طريقة النظير الضربي .

٣) استخدم قاعدة كريمر لحل النظام التالي : س – ص = ٣ ، ٢ س + ص = ٠

٤) استخدم طريقة كريمر لحل النظام : ٢ س – ٣ص = ٣ ، ص + ٣ س = ١٠

متوسط التغير

- التغير في قيمة س = س٢ - س١ بالرموز Δ س = س٢ - س١
- التغير في قيمة ص = ص٢ - ص١ بالرموز Δ ص = ص٢ - ص١
- متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{ق(س٢) - ق(س١)}{س٢ - س١}$
- ميل القاطع لمنحنى الاقتران = $\frac{ص٢ - ص١}{س٢ - س١}$ = $\frac{ق(س٢) - ق(س١)}{س٢ - س١}$

السؤال الأول:

١ – إذا كانت س١ = ٢ ، س٢ = ٧ ، جد Δ س .

الحل /

.....

٢ – إذا كانت س١ = -١ ، س٢ = -٥ ، جد Δ س .

الحل /

.....

٣ – إذا كانت س١ = ٤ ، Δ س = ٦ جد س٢ .

الحل /

.....

٤ – إذا كانت س٢ = ٥ س١ ، وكان Δ س = ١٢ ، أوجد س٢ .

الحل /

.....

.....

٥– ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = س^{٢} + ١ عندما تتغير س من س١ = ١ إلى س٢ = ٣ .

الحل /

.....

.....

٦- إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٥ س ، ما متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من صفر إلى ٤ .

الحل /

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٧- ما متوسط تغير الاقتران ق(س) = $\sqrt{٤س - ٧}$ في الفترة [٤، ٢] .

الحل /

.....

.....

٨ - ما متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) = $\frac{-١٢}{س+١}$ عندما تتغير س من $س_١$ = ٢ الى $س_٢$ = ٥ .

الحل /

.....

.....

٩- إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) في الفترة [– ٤،٢] يساوي ٣، وكان ق (-٤) = ٢، فجد ق (٢) .

الحل /

.....

.....

١٠- إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير **س** من **$س_١$** =٢ الى **$س_٢$** =٤ هو٢ ، وكان ق (٤) = ٦، فما قيمة ق (٢) .

الحل /

.....

.....

.....

١١- إذا علمت أن ق (٥) - ق (- ٢) = ٣٥ ، جد متوسط تغير الاقتران ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ = - ٢ الى $س_٢$ = ٥

الحل /

.....

.....

.....

١٢- إذا كانت النقطتان أ (-٢ ، ٤) ، ب (٣ ، ٩) نقطتان على منحنى الاقتران ص = ق(س) فإوجد متوسط تغير الاقتران عندما تتغير س من $س_١$ = - ٢ الى $س_٢$ = ٣

الحل /

.....

.....

.....

١٣ - إذا كان ق (٣) = ٢ ق (٥) ، فإوجد ق (٥) علما بأن متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٢ عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ **الحل /**

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

١٤- أوجد ميل المستقيم القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) في نقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٩)

الحل /

.....

.....

١٥- إذا وقعت النقطتان أ (٣ ، -١٠) ، ب (٥ ، جـ) على المنحنى ص = ق(س) ، وكان متوسط التغير الاقتران عندما تتغير س من ٣ إلى ٥ يساوي ٣ ، فما قيمة / قيم جـ

الحل /

.....

.....

١٦- إذا كان ق(س) = س) + ٧، أجد ميل القاطع المار بالنقطتين (-٢، ق(-٢)) ، ب (٣ ، ق(٣))

الحل /

.....

.....

.....

١٧- إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = أس^{٢} - ٥ في الفترة [٢،٥] يساوي٤، أوجد قيمة الثابت أ .

الحل /

.....

.....

١٨- إذا كان متوسط تغير الاقتران ق(س) = ٢س^{٢} + أ س في الفترة [– ٢، – ٣] يساوي٢، أوجد قيمة الثابت أ .

الحل /

.....

.....

١٩- إذا كان هـ (س) = ٣ ق(س) – ٥ ، و كان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٧ هو ٤ ، أوجد متوسط تغير الاقتران هـ (س) .

الحل /

.....

.....

٢٠- إذا كان هـ (س) = $\frac{١}{٣}$ ق(س) + ١، و كان متوسط التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من -١ إلى ٣ هو ١٢ ، أوجد متوسط تغير الاقتران هـ (س) .

الحل /

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

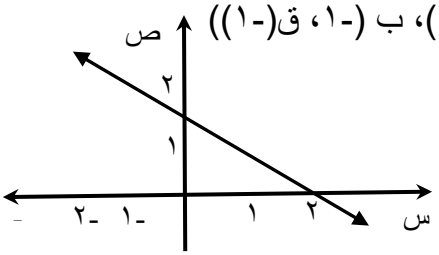
٢١- إذا كان هـ (س) = $\frac{٢}{٥}$ ق(س) + ١ ، وكان متوسط التغير للاقتران ق(س) في الفترة [– ٣،٥] هو ١٢ ، أوجد متوسط تغير الاقتران هـ (س)

الحل /

.....

.....

٢٢ - احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) و الذي يمر بالنقطتين (٢، ق(٢))، ب (-١، ق(-١))



الحل /

.....

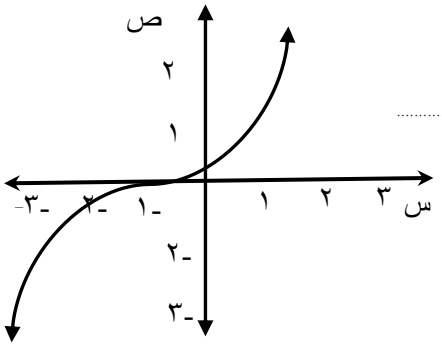
.....

٢٣ - احسب ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق(س) و الذي يمر بالنقطتين (١، ق(١)) ، ب (-٣ ، ق(-٣))

الحل /

.....

.....



المشتقة الأولى

تعريف : **المشتقة الأولى للاقتران ص = ق(س)** عند النقطة (س١ ، ق (س١))هي

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + \Delta س) - ق(س)}{هـ}$ ويرمز لها بالرمز **قَ (س)** أو $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = س١}$ أو $ص'\Big|_{س = س١}$

و للتبسيط يمكن كتابة Δ س = هـ فتكون **قَ (س١)** = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$

١ - إذا كان ق(س) = ٧ أحسب قَ (٣) باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة.

الحل /

.....

.....

.....

٢ - إذا كان ق(س) = ٣ س + ٤ أحسب قَ (٢) باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة.

الحل /

.....

.....

.....

٣ - إذا كان ق(س) = ٨ – ٢س أحسب قَ (٥) باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة.

الحل /

.....

.....

.....

٤ - إذا كان ق(س) = س^{٢} +١ أحسب قَ (٢) باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة.

الحل /

.....

.....

.....

٥ - إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٢ س أحسب قَ (١) باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة.

الحل /

.....

.....

.....

٦ - إذا كان قَ(٢) = ٤ ، ق (٢) = ٣ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+هـ) - ق(٢)}{هـ}$

.الحل /

.....

.....

.....

٧ - إذا علمت أن ق(س) = ق(س) = س^{٣} - ٢ س ، جد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣+هـ) - ق(٣)}{٤هـ}$

.الحل /

.....

.....

.....

٨ - إذا كان متوسط التغير في الاقتران ص = (س) ، عندما تتغير س من س$_{١}$ = ٣ الى

س$_{٢}$ = ٣ + هـ = $\frac{-١٢}{٢(٣+هـ)}$ ، فجد قَ (٣)

.الحل /

.....

.....

.....

٩ - إذا كان متوسط تغير الاقتران ص = ق(س) عندما تتغير س من $س_١$ = ٥ الى $س_٢$ = ٥ + هـ

يساوي $\frac{١٣ هـ + هـ^٢}{هـ}$ ، فأوجد قَ (٥)

.الحل /

.....

.....

.....

قواعد الاشتقاق

قاعدة (١) **إذا كان ص = ق(س) = أ ، أ عدد حقيقي ، فإن قَ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر**

١ - إذا كان ق(س) = ٥ أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

.....

٢ - إذا كان ق(س) = ١ - ٥ $\sqrt{٥}$ أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

.....

٣ - إذا كان ق(س) = (١٨ + $\sqrt{٢}$ - ٤٤)^{١١٢} أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

قاعدة (٢) **إذا كان ص = ق(س) = أ س + ب ، أ ، ب عددان حقيقان فإن قَ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$ = أ**

١ - إذا كان ق(س) = ٢س - ٥ أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٢ - إذا كان ق(س) = ١ -٧س أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

٣ - إذا كان ق(س) = $\frac{٢}{٥}$ س - $\sqrt{٦}$ أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

قاعدة (٣) إذا كان ق(س) = س^{ن} ، فإن قَ (س) = ن س$^{ن - ١}$

١ - إذا كان ق(س) = **س**^{٤} أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

٢ - إذا كان ق(س) = - ٧**س**^{٣} أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

٣ - إذا كان ق(س) = ٦- **س**^{٨} أحسب قَ (س) .

الحل /

.....

.....

٤ - إذا كان ق(س) = $\sqrt[٥]{س^{٣}}$ أحسب قَ (١) .

الحل /

.....

.....

قاعدة (٤) إذا كان هـ (س) = أ . ق(س) ، فإن هـَ (س) = أ . قَ (س) حيث أ عدد حقيقي ق(س) قابل للاشتقاق

١ - إذا كان هـ (س) = ٦ ق(س) أحسب هـَ (س) .

الحل /

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٢- إذا كان هـ (س) = -٢ ق(س) و كان قَ (٢) = -٥ أحسب هـَ (٢) .

الحل /

.....

.....

٣ - إذا كان هـ (س) = $\frac{١}{٣}$ ق(س) و كان قَ (٧) = ٢٧ أحسب هـَ (٧) .

الحل /

.....

.....

٤ - إذا كان ٥ هـ (س) = ق(س) و كان قَ (٧) = ٤٥ أحسب هـَ (٧) .

الحل /

.....

.....

.....

تمارين و مسائل

١ - جد مشتقة الاقتران ق(س) = س + ١ ، عندما س = ٤

الحل /

.....

.....

٢ - إذا كان ق(س) = $\frac{٦}{١٩}$ س ، فأوجد قَ (-١١) ؟

الحل /

.....

.....

٣ - جد مشتقة الاقتران ق(س) = س ^{٤} + ٩ ، عندما س = ٢

الحل /

.....

.....

٤- إذا كان ق(س) = $\sqrt[٧]{س^{٤}}$ ، فأوجد قَ (١) ؟

الحل /

.....

.....

.....

٥ - جد مشتقة الاقتران ق(س) = س ^{٦} ، عندما س = -١

الحل /

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٦ - إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{\text{س}^8}$ ، فأوجد قَ (س) ؟

الحل /

.....

.....

.....

٧ - إذا كان ق(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، فأوجد قَ (س) عندما س = ١

الحل /

.....

.....

.....

٨ - إذا كان إذا كان ق(س) = $\sqrt[3]{\text{س}^2}$ ، فأوجد قَ (-١) ؟

الحل /

.....

.....

.....

٩- إذا كان ق(س) = $\sqrt[7]{\text{س}^5}$ ، فأوجد قَ (س) عندما س = ١

الحل /

.....

.....

.....

١٠ - إذا كان ص = ٣ ق(س) **و كان** قَ (٩) = -٢ أحسب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٩

الحل /

.....

.....

.....

١١ - إذا كان ٢ ص = ق(س) **و كان** قَ (٤) = -٦ أحسب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = ٤

الحل /

.....

.....

.....

١٢ - إذا كان ق(س) = أ س^3 ، **و كان** قَ (٣) = ٥٤ أحسب ققيمة الثابت أ .

الحل /

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

١٣ - إذا كان ق(س) = - أ س^{٢} ، و كان قَ ($\frac{١}{٥}$) = ٣٥ أحسب ققيمة الثابت أ .

الحل /

.....

.....

.....

١٤ - إذا كان ق(س) = جـ $\sqrt{س}$ ، و كان قَ (١) = ١٢ أحسب ققيمة الثابت جـ .

الحل /

.....

.....

.....

قواعد الاشتقاق

قاعدة (١) **إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، و كلن ك (س) = ق(س) ± هـ (س)**

فإن الاقتران ك(س) يكون قابلا للاشتقاق ويكون كَ **(س) =** قَ (س) **±** هـَ (س)

١- إذا كان ق(س) = ٤ س^{٢} ، **و كان** هـ (س) = ٣س^{٢} أجد .

١) **(ق + هـ)** (س)

٢) **(ق - هـ) (٢)**

الحل /

.....

.....

.....

.....

٢ -إذا كان ق(س) = ٥س^{٢} - ٢س + ٥ ، أجد قَ (٣) .

الحل /

.....

.....

.....

٣ - إذا كان ق(س) = ك (س)- م (س) +٢ ، و كان ك(س) =٥ س^{٢} + ٢، وكان م(س) = ٢س^{٥} - ٩ أجد قَ (-٢) .

الحل /

.....

.....

.....

قاعدة (٢) إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س= أ ،

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

فإن (ق × هـ)َ (س) = ق (س) × هـَ(س) + هـ (س) × قَ (س)

= الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

١- استخدم المعطيات في الشكل المقابل لإيجاد (ق × هـ)َ (– ٢)

ق (-٢)	قَ (- ٢)	هـ(– ٢)	هـَ (– ٢)
٣	-٢	-١	٨

.....

.....

.....

٢ - إذا كان هـ (س) = (س^{٢}+ ٥) (٨ – س^{٣}) فأوجد هـَ (١) .

الحل /

.....

.....

.....

٣- إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} × هـ (س) ، جد قَ (٢) بحيث هـ (٢) = ٢، هـَ (٢) = -١ ،

الحل /

.....

.....

.....

٤ - إذا كان ق (١) = ٣ ، قَ (١) = ٢ ، هـ (١) = ٥ ، هـَ (١) = ٠ ، فأوجد (ق(س) × هـ (س))َ

الحل /

.....

.....

.....

قاعدة (٣) إذا كان ق(س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق عند س= أ ،

فإن $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'$ (س) = $\frac{هـ(س) \times قَ(س) - ق(س) \times هـَ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$

= $\frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$

١ - إذا كان ق (١) = ٤ ، قَ (١) = -٣، هـ (١) = -٢ ، هـَ (١) = ٥ ، فأوجد $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'$ (١)

الحل /

.....

.....

.....

٢ - إذا كان ق(س) = $\frac{٣س^{٢}}{هـ(س)}$ وكان هـ (٢) = -١ ، هـَ (٢) = ٦ ، فإوجد قَ (٢)

الحل /

.....

.....

.....

٣- جد مشتقة الاقتران ق(س) = $\frac{س^{٢} + ٣س}{س + ٤}$ ، عندما س = ١

الحل /

.....

.....

.....

٤- استخدم المعطيات في الشكل المقابل لإيجاد

ق (٢)	قَ (٢)	هـ(٢)	هـَ (٢)
٢	-٤	-٢	٥

١) (ق + ٢ هـ)َ (٢) ٢) (٢ق – ٣ هـ)َ (٢) ٣) (ق × هـ)َ (٢) ٣) $(\frac{ق}{هـ})$َ (٢)

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٥ - استخدم المعطيات في الشكل المقابل لإيجاد هـَ (– ٥)

ق (-٥)	قَ (– ٥)	هـ(– ٥)	(ق × هـ)َ (– ٥)
٢	-٧	-١	٤

.....

.....

.....

٦ - إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٣ ، هـ (س) = ٣ -٢س ، **جد**

١) (ق + هـ)َ (١) ٢) (س٣ × ٣ هـ)َ (٢) ٣) (ق × هـ)َ (٢) ٣) قَ(٢) × هـَ(٢)

٣) $(\frac{ق}{هـ})$َ (س)

الحل /

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

.....

٧- كان ك(س) = $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ وكان ق (٢) = ٤، قَ (٢) = -٣، هـ (٢) = -١ ، هـَ (٢) = ٦ ، فإوجد كَ (٢)

الحل /

٨- إذا كان ق ، ك اقترانين قابلين للاشتقاق حيث ق(١) = ٤ ،قَ (١) = ٣، كَ (١) = -٣ ، (ق × ك)َ (١) = ٦

جد ك (١) **الحل /**

٩ - إذا كان (ق ÷ هـ)َ (٢) = ٣ وكان ، قَ (٢) = -١ ، هـ (٢) = ٥ ، هـَ (٢) = ٢ ، جد ق (٢)

الحل /

١٠ - إذا كان ع (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} ، فجد عَ (١)

الحل /

١١- إذا كان ع (س) = س^{٣} – ب س^{٢} ، كان عَ (١) = ١٦ . فما قيمة الثابت ب

الحل /

١٢- إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س} - ٤}{\text{ب}}$ ، كان قَ (٦) = -٣ . فما قيمة الثابت ب

الحل /

١٣- إذا كان ق (س) = $\frac{\text{جـ س} + ٥}{٣ - ٤\text{س}}$ ، كان قَ (-١) = $\frac{١}{٢}$. فما قيمة الثابت جـ

الحل /

قاعدة (٤) إذا كان ص = ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق فإن قَ (س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق (س) و يرمز لها بالرمز قَ (س) أو بالرمز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أو صَ وكذلك قً (س) هي المشتقة الثانية للاقتران ق (س) و يرمز لها بالرمز قً (س) أو بالرمز $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ أو صً ، وكذلك فإن قً (س) المشتقة الثالثة للاقتران و يرمز لها بالرمز قً (س) أو $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣}$ أو صً و هكذا ..... ،

١- إذا كان ق (س) = ٤س^٣ – ٢ س^٢ – ٣س + ٥ ، فأوجد قَ (س) ، قً (س) ، قً (س).

الحل /

٢- إذا كان ص (س) = ٥ س^٣ –٢ س -٣ ، فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $_{\text{س} = ٢}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $_{\text{س} = ٢}$ ، $\frac{\text{ء}^٣\text{ص}}{\text{ءس}^٣}$ $_{\text{س} = ٢}$

الحل /

٣- إذا كان ق(س) = ٤ س^{٣} –٢ س^{٢} ، و كانت قَ (-١) =١٢ ، فأوجد قيمة الثابت ب ، ثم أوجد قً (٠)

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

٤- أجد المشتقة الأولى والثانية والثالثة للاقتران ق(س) = ٤ س^{٥} –٢ س^{٤} + ٤ س –٢ ، ثم أبين أن ق$^{(٦)}$ (١) = ٠

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

تطبيقات على المشتقة

معادلة المماس لمنحنى الاقتران

تذكر	معادلة الخط المستقيم الذي ميله م . و يمر بالنقطة (س١، ص١) هي : ص - ص١ = م (س - س ١)
قاعدة (١)	ميل المماس لمنحنى ق (س) عند س ١= أ يساوي قَ (أ)

١ - أوجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ٢ س + ١ ، عندما س = ١ .

الحل /

.....

.....

.....

.....

٢ - أوجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = (س + ٣) (س + ٢) ، عندما س = ٠ .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٣- أوجد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤ س}{س^{٢}+١}$ ، عند النقطة التي احداثيها السيني= ٢

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤ – إذا مر المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٢ س^{٣} - ٤ س + ١ ، بالنقطتين ل (١، -١) ، م (٢، ٤) ،

١. أي النقطتين ل ، م تعد نقط تماس

٢ . أجد هذا معادلة المماس

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٥ - جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = (س + ٢) (٣ س - ٥) ، عندما س = ١ .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٦ - جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س (س + ٢) ، و الموازي لمحور السينات .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٧ - جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢}{\text{س} + ٣}$ ، عندما س = - ٢ .

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٨- أوجد قيمة الثابت جـ التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = س^{٢} + جـ س - ٣ مساوياً ٤ عندما س = ١ ؟

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٩- جد الإحداثي السيني للنقطة / النقط التي يكون عندها مماس الاقتران ق(س) = (س^{٢} -٤) (٣ س -٥) (س+١)أفقياً

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

١٠ - جد النقطة الواقعة على منحنى الاقتران ق(س)= س^{٢} - ٤ س + ٥ ، والتي يكون ميل المماس عندها يساوي ٦ ، ثم أكتب معادلة المماس عند تلك النقطة .

الحل /

١١- أوجد قيمة الثابت أ التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = أ س^{٢} + ٢ س + ٣ مساوياً ٦ عندما س = ١ ؟

الحل /

١٢- أوجد قيم س للنقط على منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} - ١٢ س + ٣٠ والتي يكون ميل المماس مساوياً صفراً ؟

الحل /

قاعدة السلسلة (قاعدة الاقتران المركب)

- إذا كان ق (س) = س^{٢}+ ٣ س ، هـ (س) =٣س ، فأوجد (ق o هـ) (س) ، (ق o هـ) (٢) ، (هـ o ق) (س) ، (هـ o ق) (-٢).

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

قاعدة السلسلة :

إذا كان هـ (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند س ، وكان ق (س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند هـ (س) فإن الاقتران المركب (ق oهـ) (س) يكون قابلا للاشتقاق عند س ، ويكون (ق o هـ)َ (س) = قَ (هـ (س))هـَ(س)

١- إذا كان ق (س) = س^{٣}–٣س+ ٥ ، هـ (س) = س^{٢}+٥ ، فأوجد (ق o هـ)َ(س) ، ثم أجد (ق o هـ)َ (٢).

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

٢- إذا كان ق (س) = س^{٢}–٤ ، هـ (س) = ٢س^{٢}+٥ ، فأوجد (ق o هـ)َ (-٢) ، ثم أجد (هـ o ق)َ (٣).

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

نتيجة (١) :

إذا كان ص= ق (ع) ،ع =هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق ، فإن ص= ق (هـ (س)) وبالتالي :

$\frac{دص}{دس}$ = قَ (ع) ×هـَ(س) = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$ أي ان : $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{دص}{دع}$ × $\frac{دع}{دس}$

١- إذا كان ص = ع^{٣} – ع ، ع = ٣س +٢ ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

٢- إذا كان ص = ك^{٢}+ ٣ك - ١ ، ك = س^{٢} + س +٢ ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س = ١

الحل /

.....

.....

.....

.....

٣- إذا كان هـ (س) ، ق(س) اقترانين قابلين للاشتقاق على ح بحيث أن ق (٢) = ٥، قَ (٢) = -٣، هـ (٢) = -١ ،

هـَ (٢) = ٣ ، أجد: (ق ∘ هـ)َ (٢) ، (هـ ∘ ق)َ (٢).

لحل /

.....

.....

.....

.....

نتيجة (٢) :

إذا كان ص= (ق (س))^{ن} ، ن عدد نسبي وكان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق عند فإن $\frac{دص}{دس}$ = ن (ق (س))$^{ن-١}$.قَ (س)

١- إذا كان ص = (٣س + ٤)^{٢} ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

٢- إذا كان ص = $\sqrt{٥س - ١}$، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل /

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

القيم القصوى المحلية للاقتران

قاعدة (١) اذا كان ق (س) معرفا على الفترة [أ ، ب] ، فإن ق (س) يكون :

متزايدا في الفترة [أ ، ب] إذا كانت قَ (س) > صفر لكل س في الفترة]أ ، ب[

متناقصا في الفترة [أ ، ب] إذا كانت قَ(س) < صفر لكل س في الفترة]أ ، ب[

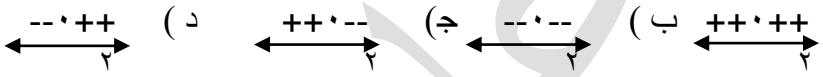
ثابتا في الفترة [أ ، ب] إذا كانت قَ(س) = صفر لكل س في الفترة]أ ، ب[

تعلم يكون للاقتران ق (س) المعرف على ح قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند س = أ إذا كان :

قَ (أ) = صفراً بغير ق (س) من سلوكه حول س = أ من التزايد إلى التناقص أو العكس

١- اختر الإجابة الصحيحة

أ- إحدى اشارات ق(س) الآتية تظهر وجود قيمة عظمى للاقتران ق(س) عند س = ٢



ب-

عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} - ٢٧ يساوي .....

ث- أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س^{٣} – ٢س^{٢} + ٥ يساوي .....

ح- أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

عدد القيم القصوى للاقتران ق(س) = س - ٢ س^{٢} يساوي .....

د- أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

٢- أوجد القيم القصوى المحلية للاقتران ق (س) = س^{٢} + ٢ س

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

٣- أوجد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = س^{٢} - ٦ س + ١ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤- أوجد فترات التزايد و التناقص للاقتران ق (س) = (س +١) (٣ س - ٥)

الحل /

٥- جد القيم القصوى للاقتران ق(س) = ٤ س - س^{٢} .

. الحل /

٦- عين القيمة / القيم القصوى المحلية للاقتران ق(س) = - س^{٢} + ٦ س + ٥ ، س ∈ ح مستخدماً اختبار المشتقة الأولى .

٧- أوجد القيم المحلية للاقتران ق(س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} ، س ∈ ح وحدد نوعها .

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٨- أوجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١ .

٩- بين أنه لا يوجد للاقتران ع (س) = ٨ - س^{٣} ، س ∈ ح ، أي قيمة قصوى محلية

الحل /

١٠- إذا كان الاقتران ق(س) = -س^{٢} + ب س - ٣ وكان للاقتران ق(س) قيمة عظمى عند س = -٢ . فما قيمة ب

الحل /

١١- إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٣} + ٢س + ب ، قيمة صغرى محلية وكان قَ (١) = ٥ ، ويمر منحنى الاقتران ق(س) بالنقطة (٢ ، - ٣) فما قيم الثابتين أ ، ب .

الحل /

انتهت الأسئلة

التكامل غير المحدود

عملية التكامل عملية عكسية للتفاضل

الاقتران ق(س) $\xleftarrow{\text{عملية تفاضل}}$ المشتقة الأولى قَ (س)

الاقتران العام ق(س) $\xrightarrow{\text{عملية تكامل}}$ المشتقة الأولى قَ (س)

س^{٢} + عدد حقيقي $\xleftarrow{\text{عملية تفاضل}}$ ٢ س

س^{٢} + جـ $\xrightarrow{\text{عملية تكامل}}$ ٢ س

تعريف : إذا كان ق(س) اقترانا مشتقته الأولى قَ (س) فإن التكامل غير المحدود للاقتران قَ (س) بالنسبة لـ س يساوي ق (س) + جـ و يرمز لعملية التكامل بالرمز ∫ وبصورة عامة فإن :

∫ قَ(س) ء س= ق (س) + جـ ، جـ عدد حقيقي

إذا كان ق(س) = ٣س^{٢} **فإن** قَ(س) = ٦س

ويكون ق(س) = ∫ قَ(س) ء س = ∫ ٦ س ء س = ٣س^{٢}

أكمل إذا كان ق(س) = **٣س^{٢} + ٢س** **فإن** قَ(س) = ...

قاعدة (١) : ∫ أ ء س = أ س + جـ حيث أ ، جـ عددان حقيقيان

أوجد التكامل المطلوب :

١) ∫ ٥ ء س = ...

٢) ∫ $\frac{١}{٣}$ ء س = ...

٣) ∫ ($\sqrt{٦}$ - ٧) ء س = ...

قاعدة (٢) : ∫ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + جـ حيث ن ، جـ عددان حقيقيان ن ≠ -١

أوجد التكامل المطلوب :

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

١) $\int$ س^{٢} ء س = ...

٢) $\int$ ٤س^{٣} ء س = ...

٣) $\int$ -٧ س^{٦} ء س = ...

٤) $\int$- س ء س = ...

٥) $\int$ -٢ س$^{-٣}$ د س = ...

.....

.....

٦) $\int$ $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ د س = ...

.....

.....

٧) $\int$ س$^{\frac{١}{٢}}$ ء س = ...

.....

.....

٨) $\int$ س$^{-٢}$ ء س = ...

.....

.....

٩) $\int$ $\frac{-٢}{س^{٥}}$ د س = ...

.....

.....

١٠) $\int$ $\sqrt{س}$ ء س = ...

.....

.....

قاعدة (٣)

:إذا كان ق(س) ، هـ (س) ء س قابلين للاشتقاق فإن $\int$ (ق(س) ± هـ (س)) ء س = $\int$ ق(س) ء س ± $\int$ هـ (س) ء س

أوجد التكامل المطلوب :

١) $\int$ (س + س^{٢} – ١) ء س = ...

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

.....

.....

٢) ∫ (س^{٢} + س) ء س = ...

قاعدة (٤)

:إذا كان ق(س) ء س قابلا للتكامل و كان هـ (س) = ك حيث ك عدد حقيقي ، ك ≠ صفر

. فإن ∫ هـ (س) ء س = ∫ ك . ق(س) ء س = ك ∫ ق(س) ء س

١) ∫ ٢س ء س = ...

٢) ∫ ٥ س^{٤} س = ...

تمارين و مسائل

جد التكاملات الاتية

١) ∫(- ٢س + ١) ء س = ...

٣) ∫ (٥ س^{٤} - ٢س^{٣}– ١) ء س = ...

٤) ∫ (½ س - ١) ء س =

.....

.....

٥) ∫ (س^{½} - ½) ء س =

.....

.....

٦) ∫ (٣- س$^{-٣}$ + س$^{-٢}$) ء س = .

.....

.....

٧) ∫ (١- س + س$^{-٢}$) ء س

.....

.....تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٨) $\int \text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$

.....

.....

.....

$\int \text{س} \, (٢\text{س} - ١) \, \text{ء س}$

.....

.....

.....

٩) $\int (\text{س} - ٢)^{٢} \, \text{ء س}$

.....

.....

١٠) $\int (\text{س} + ٢) \, (\text{س} + ١) \, \text{ء س}$

.....

.....

.....

١١) $\int (\sqrt{\text{س}} + ٣) \, \text{ء س}$

.....

.....

١٢) $\int (\text{س} - \text{س}^{-٣} + \text{س}^{-٢}) \, \text{ء س} =$ .....

.....

.....

١٣) $\int \text{س} \sqrt{\text{س}} \, \text{ء س} =$ .....

.....

.....

.....

١٤) $\int \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}} \, \text{ء س} =$

.....

.....

.....

١٥) $\int (\sqrt{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}}) \, \text{ء س} =$ .....

.....

.....

.....

١٦) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} \, \text{ء س} =$ .....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

١٧) $\int \frac{س^٢ - ٣س - ١٠}{س - ٥}$ ء س = ...

.....

.....

٢٠) $\frac{ءص}{ءس} \int (٢س + ١)$ ء س = ...

.....

٢١) إذا كان ص = $\int$ (٢ س + ١) ء س ، فأوجد

.....

٢٢) إذا كان ص = $\int$ س (٤ س − ٢) ء س ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

.....

٢٣) إذا كان $\int$ ق َ(س) ء س = ٣ س^٢ − ٥س + جـ ، فأوجد ق َ (س)

.....

.....

٢٤) إذا كان ك (س) = $\int$ (٣س^٢ + ٢س) ء س ، فأوجد كَ (١)

.....

.....

السؤال الثاني :

١− إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند أي نقطة عليه يعطى بالقاعدة : قَ(س) = ٢س - ٥ ، و كان ق(٢) = ٨ ،

− جد قاعدة الاقتران ق(س) − جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند س = ٢

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

٢- جد قاعدة الاقتران ق(س) علماً بان ق(١) = ٤ ، ق (س) = ٣- ٢س ، ثم جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند س = −٣

.الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

التكامل المحدود

تعريف :

:إذا كان ق(س) اقترانا قابلا للاشتقاق ، فإنَّ $\int_{أ}^{ب}$ قَ(س) ء س = ق(س) $\Big|_{أ}^{ب}$ = ق(ب) – ق(أ)

حيث أ الحد الأدنى ، ب الحد الأعلى : أ ، ب عددان حقيقيان .

السؤال الأول:

أوجد التكامل المطلوب :

١) $\int_{١}^{٢}$ (٤س + ٣) ء س

.....

.....

.....

٢) $\int_{١}^{٣}$ (٦س^{٢} – ٥) ءس

.....

.....

.....

٣) $\int_{٢}^{١}$ (٢س + ١٢س^{٢}) ء س

.....

.....

.....

٤) $\int_{٢}^{١}$ (٦ س^{٥} – ٤ س) ء س

.....

.....

.....

٥) $\int_{١}^{٤}$ (- ٢س + ١) ء س

.....

.....

.....

.....

٦) إذا كان ق (١) = ٨ ، ق (٥) = ٦ ، فإنَّ $\int_{١}^{٥}$ ٣ قَ (س) ء س = ...

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٧) إذا كان ق (٤) = ٥ ، ق (١) = −٣ ، فإنَّ $\int_{١}^{٤} \frac{١}{٢}$ قَ (س) ء س = ...

.....

.....

.....

.....

٨) إذا كانت قَ (س) هي المشتقة الأولى للاقتران ق(س)، وكان ق (٣) = ٨ ، $\int_{٣}^{٦}$ ٢ قَ (س) ء س = ٢٠، فإنَّ ق (٦)

. .....

.....

.....

.....

٩) $\int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{س^{٣}} + \frac{١}{س^{٢}} \right)$ ء س = ...

.....

.....

.....

.....

.....

افكر :

إذا كان ص = $\int_{١}^{٢}$ س^{٢} ء س ، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر تأكد من الحل

نستنتج أن مشتقة التكامل المحدود تساوي صفر دائما ، لماذا ؟

١) إذا كان ص = $\int_{٠}^{٤}$ (٢ س + ١) ء س ، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس}$ =

.....

.....

٢) إذا كان $\int_{٣}^{ب}$ ب ء س = ١٠ ، فإنَّ قيم ب

.....

.....

٣) .إذا كان $\int_{١}^{أ}$ (٢س + ١) ء س = ٤ ، فإنَّ قيمتي الثابت أ

.....

.....

.....

.....

..

خصائص التكامل المحدود

جد $\int_{٥}^{٥}$ ٣ س^{٢} ء س ماذا تستنتج ؟

.....

.....

....

اتعلم إذا كان ص = $\int_{ب}^{ب}$ ق(س) ء س = صفر حيث ب عدد حقيقي

١) $\int_{٣}^{٣}$ س (٣س - ١) ء س = ...

.....

.....

اتعلم $\int_{أ}^{ب}$ قَ(س) ء س = - $\int_{ب}^{أ}$ قَ(س) ء س

٢) إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) ء س = ٤ ، فإنَّ $\int_{٥}^{٣}$ ٢ق(س) ء س = .

.....

.....

.

٣) إذا كان $\int_{١}^{٢}$ ٢ق(س) ء س = ٤ ، جد $\int_{٢}^{١}$ (٣ق(س) + ٢) ء س.

.....

.....

.....

.

اتعلم $\int_{أ}^{ب}$ قَ(س) ء س = $\int_{أ}^{جـ}$ قَ(س) ء س + $\int_{جـ}^{ب}$ قَ(س) ء س خاصية الاضافة

. إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ٤ق(س) ء س = ٢٠ ، $\int_{٣}^{٢}$ ق(س) ء س = -١٢ فجد $\int_{٣}^{٥}$ ٣ ق(س) ء س

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

تمارين ومسائل

السؤال الأول : جد التكاملات الأتية :

١) $\int_{١}^{٣}$ (٢س + ٣س^{٢}) ء س = ...

.....

.....

.....

.....

.....

٢) $\int_{٢}^{٣}$ (٨ - ٦س^{٢}) ء س = ...

.....

.....

.....

.....

٣) $\int_{٠}^{١}$ ($\sqrt{س}$ - $\frac{٣}{س^{٢}}$) ء س = ...

.....

.....

.....

.....

٤) إذا كان $\int$ عَ (س) ء س = **٣س^{٢} – ٨س + جـ** ، فأوجد $\int_{١}^{٣}$ **٣عَ (س)** ء س

.....

.....

.....

.....

.....

٥) إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ٣ق(س) ء س = **١٥** ، أوجد $\int_{٥}^{٢}$ (٤ق(س) + ٢ س – ٢) ء س

.

.....

.....

.....

.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

٦) إذا كان $\int_{-١}^{٢}$ ب ء س = ٢٠ ، فإنَّ قيمة الثابت ب هي .....

.....
.....
.....

٧) إذا كان $\int_{صفر}^{ب}$ (س + ٢) ء د س = ٦ ، فما قيمة / قيم الثابت ب ؟ .....

.....
.....
.....
.....
.....

٧) **إذا كان** $\int$ ق (س) ء س = $\frac{١}{س^٢}$ + جـ ، **فإنَّ** $\int_{-٢}^{١}$ ق (س) ء س = ...

.....
.....
.....
.....

٨) **إذا كان** $\int_{١}^{٣}$ قَ (س) ء س = ٨ ، **وكان** ق (٣) = – ق (١) **فما قيمة** ق (١) .

.....
.....
.....
.....
.....
.....

٩) إذا كان $\int_{-ب}^{صفر}$ ٢ ب ء س = ٨ ، حيث ب عدد حقيقي موجب ، **فما قيمة ب .**

.....
.....
.....
.....
.....

١٠) إذا كان ق (س) = $\int$ (٢ س^٢ – ٣) ء س **فما قيمة** قَ (٢) .

.....
.....
.....٧

١١) إذا كان ك (س) = $\int_{١}^{٣}$ (٣س^{٢} + ٢س) ء س ، **فما قيمة** كَ (١) .

.....

.....

.....

.....

.....

السؤال الثاني :

١ – إذا علمت أنَّ : $\int_{١}^{٥}$ (س) ء س = ٤ ، $\int_{١}^{٣}$ ٢ق(س) ء س = ١٢ ، أوجد $\int_{٥}^{٣}$ ٢ ق(س) ء د س

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

٢- إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ ٤ق(س) ء س = ١٦ ، $\int_{١}^{٥}$ ق(س) ء س = ٨ فجد $\int_{٣}^{١}$ (ق(س) –٢ س) ء س

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

٣- إذا كان $\int_{١}^{٥}$ ق(س) ء س = ٤ ، $\int_{١}^{٢}$ ٢ق(س) ء س = ١٠ ، أوجد $\int_{٥}^{٢}$ (٤ق(س) +٢ س) ء س

الحل /

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤- إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ٢ق(س) ء س =٦ ، $\int_{٤}^{٣}$ ق(س) ء س = ٢ ، جد $\int_{١}^{٤}$ (٢ س – ق(س)) ء س

الحل /

.....

.....

.....

.....

التكامل بالتعويض

١- جد $\int (٣ س + ٤)^{٤}$ ء س

الحل /

.....

.....

.....

٢-جد $\int \frac{٤}{(س - ٢)^{٦}}$ ء س

الحل /

.....

.....

.....

.....

٣-جد $\int (أ س + ب)^{٥}$ ء س أ ، ب ثوابت

الحل /

.....

.....

.....

٤-جد $\int_{١}^{٢} (٣ س - ٢)^{٣}$ ء س

الحل /

.....

.....

.....

.....

٥-جد $\int_{٠}^{١} (٢ س - ٣) (س^{٢} - ٣س + ٥)^{-٢}$ ء س

الحل /

.....

.....

.....

.....

٦-جد $\int (س + ٥)^{٢} \sqrt{(س^{٢} + ٥ س)}$ ء س

الحل /

.....

.....

.....

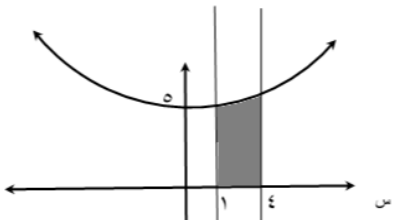
.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

السؤال الثالث:

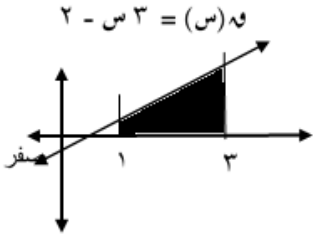
١) احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

علما بان ق(س) = ٣ س^{٢} + ٥



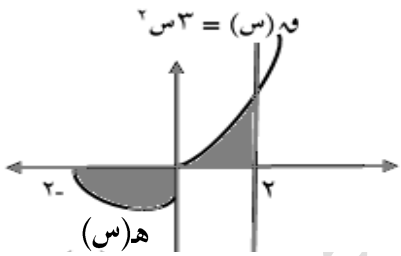
٢)احسب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور

علما بان ق(س) = ٣ س - ٢



٣) إذا كان $\int_{-٢}^{٠}$ هـ(س) ء س = – ٧ ،

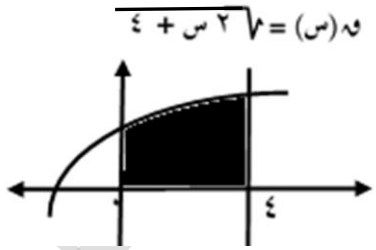
فما مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور .



٤) باستخدام التكامل المحدود ،

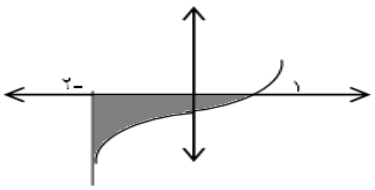
احسب مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين س = ٠ ، س = ٤

حيث ق(س) = $\sqrt{٢ س + ٤}$



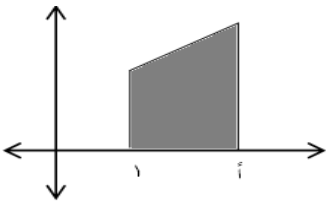
تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤

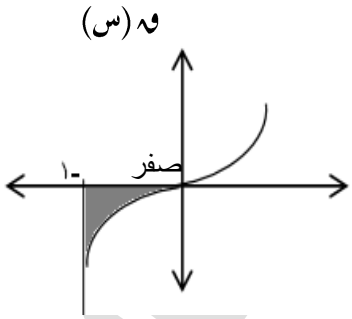


٥) استخدم التكامل لحساب مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور .

علماً ق(س) = ٤ س^{٣} - ٤



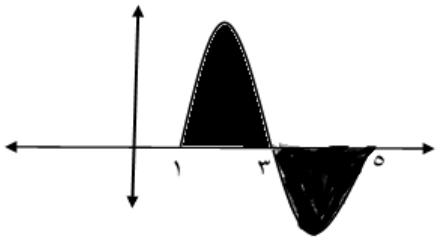
٦) استخدم التكامل لإيجاد قيمة الثابت أ ، علماً بأن مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور ١٤ وحدة مربعة ، وأن ق(س) = ٢ س + ٣



٧) معتمداً على الشكل المجاور ، احسب المنطقة المظللة في الشكل علماً بأن :

ق(س) = ٤ س^{٣}

٨) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ء س = ٦ ، $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) ء س = -٢ ، أوجد



١) $\int_{١}^{٥}$ ق(س) ء س

٢) مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور والمحصورة بين منحنى ق(س) و محور السينات

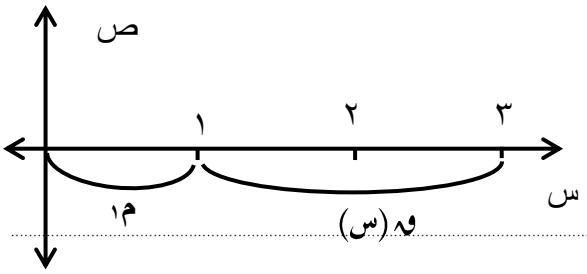
.....

.....

.....

.....

٩) معتمداً على الشكل المجاور ،إذا علمت أن :



$\int_{٠}^{٣}$ ق(س) ء س = - ١٢ و أن مساحة المنطقة م١ = ٥ وحدات مربعة ،

جد : $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ء س

.....

.....

.....

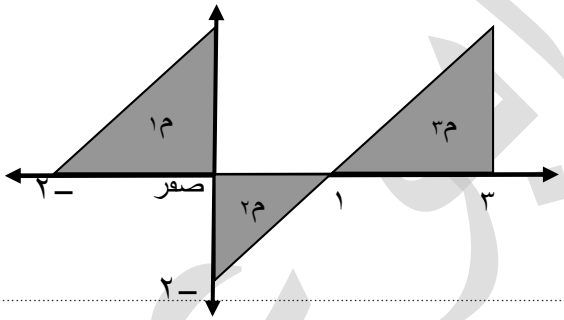
.....

.....

.....

.....

١٠) في الشكل المجاور م١ ، م٢ ، م٣ مساحات المنطقة المظللة .



عبر عما يأتي بدلالة م١ ، م٢ ، م٣

أ) المساحة الكلية المحصورة بين منحنى ق(س) ومحورالسينات **و المستقيمين = -٢ ، س = ٣**

.....

ب) $\int_{-٢}^{١}$ ق(س) ء س

.....

جـ) $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ء د س.....

.....

تلفون ٠٥٩٩٤٩٨٦١٤